BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập – Tự do – Hạnh phúc

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN NĂM 2017

Môn thi : Toán

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

Thời gian làm bài : 120 phút

Câu 1 (2 điểm) Cho biểu thức:

$$P=\frac{a^3-a-2b-\frac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\right)\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)$$

với $a>0, b>0, a\neq b, a+b\neq a^2$.

1. Chứng minh $P=a-b$.
2. Tìm a, b biết rằng $P=1$ và $a^3-b^3=7$.

Câu 2 (1 điểm) Giả sử x, y là hai số thực phân biệt thỏa mãn: $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}=\dfrac{2}{xy+1}$.

Hãy tính: $S=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{2}{xy+1}$.

Câu 3 (2 điểm) Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d) : $y=-2ax-4a$, với a là tham số.

1. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) khi $a=-\dfrac{1}{2}$.
2. Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1|+|x_2|=3$.

Câu 4 (1 điểm) Anh Nam đi xe đạp từ A đến C. Trên quãng đường AB ban đầu (B nằm giữa A và C) anh Nam đi với vận tốc không đổi là a (km/h) và thời gian đi từ A đến B là 1,5 giờ. Trên quãng đường BC còn lại, anh Nam đi chậm dần đều với vận tốc tại thời điểm t (tính bằng giờ) kể từ B là $v=-8t+a$ (km/h). Quãng đường đi được từ B đến thời điểm t đó là $S=-4t^2+at$. Tính quãng đường AB biết rằng đến C xe dừng hẳn và quãng đường BC dài 16 km.

Câu 5 (3 điểm) Cho đường tròn (O) bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B, C cắt nhau tại điểm P. Gọi D, E tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống các đường thẳng AB, AC và M là trung điểm cạnh BC.

1. Chứng minh $\widehat{MEP}=\widehat{MDP}$.
2. Giả sử B, C cố định và A chạy trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.
3. Khi tam giác ABC là tam giác đều. Hãy tính diện tích tam giác ADE theo R.

Câu 6 (1 điểm) Các số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_9$ thỏa mãn:

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_9=10\\ x_1+2x_2+\cdots+9x_9=18\end{cases}.$$

Chứng minh $1.19x_1+2.18x_2+\cdots+9.11x_9\geq 270$, đẳng thức xảy ra khi nào?

------------------------------Hết------------------------------

Câu 1.

1. Sử dụng các phép biến đổi thông thường ta dễ có $P = a - b$

2. Ta có hệ

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a^3 - b^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b \\ a^2 + b^2 + ab = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+b)^2 + b^2 + (1+b)b = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \Rightarrow a = 2 \\ b = -2\,(Loai) \end{array}\right.$$

Câu 2. Ta có

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2}{(x^2+1)(y^2+1)} = \frac{2}{xy+1}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+2)(xy+1) = 2(x^2+1)(y^2+1)$$

$$\Leftrightarrow xy(x^2+y^2-2xy) = (x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 1 \\ x = y\,(L) \end{array}\right.$$

$$\rightarrow S = \frac{2}{1+xy} + \frac{2}{1+xy} = \frac{4}{1+xy} = 2$$

Câu 3. 1. Khi $a = -\frac{1}{2} \rightarrow d \cap P : (-1;1),(2;4)$

2. + d cắt P tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow a > 4, a < 0\,(*)$

Ta có

$|x_1|+|x_2|=3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|=9$

$\Leftrightarrow 4a^2-2.4a+2.|4a|=9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a^2=9(a>4) \\ 4a^2-16a=9(a<0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\pm\dfrac{3}{2}(Loai) \\ a=\dfrac{9}{2}(Loai), a=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $a=-\dfrac{1}{2}$

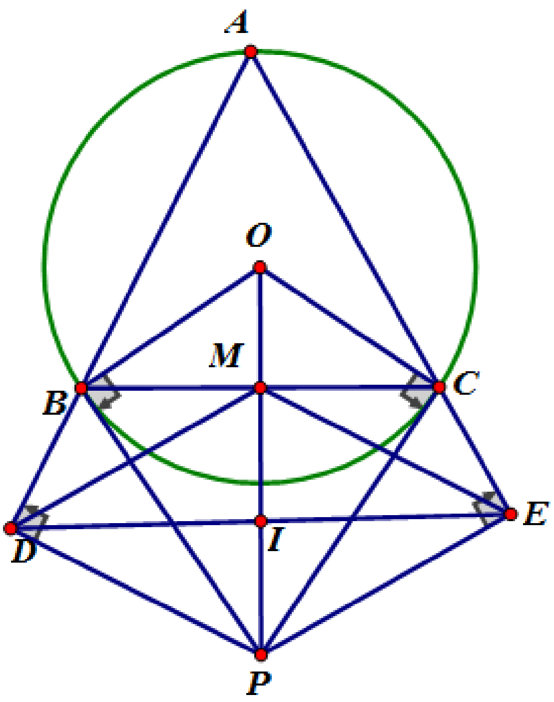
Câu 4.

Khi xe dùng hẳn tại C thì $v=0\rightarrow$ thời gian xe đi từ B đến C là $t=\dfrac{a}{8}$

Mặt khác có $BC=16=-4\left(\dfrac{a}{8}\right)^2+a\dfrac{a}{8}\Leftrightarrow a=16, a=-16(L)$

$\rightarrow AB=16.1,5=24km$

Câu 5.



1. Ta có DBPM và CEPM nội tiếp nên $\widehat{MDP}=\widehat{PBM}=\widehat{MCP}=\widehat{PEM}$
2. Ta có $DM//PE, DP//ME\rightarrow MDPE$ là hình bình hành

   Gọi I là trung điểm của MP nên I cố định

Vậy DE luôn qua I cố định

3. Khi tam giác ABC đều thì A,O, I thẳng hàng và AD=AE

Ta có

$$OM = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}, OP = \frac{OB}{\cos 60^0} = 2R$$
$$\to MI = \frac{MP}{2} = \frac{3R}{4} \to AI = R + \frac{R}{2} + \frac{3R}{4} = \frac{9R}{4}$$
$$DE = 2IE = 2AI.\tan 30^0 \to S_{ADE} = \frac{1}{2}DE.AI = \frac{27\sqrt{3}R^2}{16}$$

Câu 6. Ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_9 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + ... + 9x_9 = 18 \end{cases}$$
$$\to 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 = 72$$
$$\to 10(8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8) = 720$$

$$1.19x_1 + 2.18x_2 + ... + 9.11x_9$$
$$= 8x_1 + 7.2x_2 + 6.3x_3 + ... + 8x_8 + 11(x_1 + 2x_2 + ... + 9x_9)$$
$$= 8x_1 + 7.2x_2 + 6.3x_3 + ... + 8x_8 + 198$$
$$= (8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + ... + x_8) + (7x_2 + 2.6x_3 + ... + 7x_8) + 198$$
$$= (7x_2 + 2.6x_3 + ... + 7x_8) + 270$$

Do $x_1, x_2.., x_8 \geq 0 \to 1.19x_1 + 2.18x_2 + ... + 9.11x_9 \geq 720$

Dấu "=" xảy ra khi $x_2 = x_3 = ... = x_8 = 0, x_1 = 9, x_9 = 1$